Chapitre 4 Espaces vectoriels

(24.09)

Dans cette séance :
- déf. d'espace vectoriel (EV) + exemples
- déf de sous-espace vectoriel
- déf de famille libre/liée et partie engendrée
- déf de combinaison linéaire

} déjà vues pour $\mathbb{R}^n$

§4.2. Espaces vectoriels

Déf. 4.2 Un espace vectoriel (EV) est un ensemble non vide V muni de deux applications

$$\begin{array}{rcl} V \times V & \longrightarrow & V \\ (v, w) & \longmapsto & v+w \end{array} \quad \text{(somme ou addition)} \quad \& \quad \begin{array}{rcl} \mathbb{R} \times V & \longrightarrow & V \\ (\lambda, v) & \longmapsto & \lambda . v \end{array} \quad \text{(multiplication/produit par des scalaires)}$$

qui satisfont aux propriétés :

(EV.1) $u+v = v+u$, $\forall u, v \in V$ (commutativité)

(EV.2) $u+(v+w) = (u+v)+w$, $\forall u, v, w \in V$ (associativité)

(EV.3) $\exists$ un élément $0_V \in V$ tel que $u + 0_V = u$, $\forall u \in V$ (0_V = vecteur nul de V) ou neutre

(EV.4) $\forall u \in V$, $\exists$ un élément $-u \in V$ tel que $u + (-u) = 0_V$ ($-u$ = vecteur opposé de u)

(EV.5) $c.(u+v) = c.u + c.v$, $\forall c \in \mathbb{R}$, $\forall u, v \in V$ (EV.6) $(c+d).u = c.u + d.u$, $\forall c, d \in \mathbb{R}$, $\forall u \in V$

(EV.7) $(c.d).u = c.(d.u)$, $\forall c,d \in \mathbb{R}, \forall u \in V$ (associativité mixte) (EV.8) $1.u = u$, $\forall u \in V$.

Désormais $\longrightarrow$ $\boxed{\text{vecteur}}$ = $\boxed{\text{élément d'un espace vectoriel}}$!

Exemples (1) $V = \mathbb{R}^n$ avec la somme $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ et le produit $\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right) \mapsto \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix}$ & $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\left(\lambda, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) \mapsto \begin{pmatrix} \lambda . x_1 \\ \vdots \\ \lambda . x_n \end{pmatrix}$

est un espace vectoriel !

(S, T : $S \times T = \{(s,t) : s \in S \text{ et } t \in T\}$ produit cartésien)

(2) $V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ applications}\}$ muni de $V \times V \xrightarrow{\text{somme}} V$, $(f,g) \mapsto f+g$ & $\mathbb{R} \times V \xrightarrow{\text{produit}} V$, $(\lambda, f) \mapsto \lambda f$

données par

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x) \quad \& \quad (\lambda.f)(x) = \lambda.f(x), \ \forall x \in \mathbb{R}$$

est un espace vectoriel. (exercice 1, série 3) avec 0_V est la fonction nulle : $x \mapsto 0, \forall x \in \mathbb{R}$

et $(-f)(x) = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

(3) On rappelle qu'une fonction polynomiale (ou polynôme) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une application telle qu'il existe $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que

coefficients de f

$$f(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n, \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Fait $a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n = b_0 + b_1 t + \ldots + b_m t^m$, $\forall t \in \mathbb{R}$ ssi $a_0 = b_0, a_1 = b_1, a_2 = b_2, \ldots$

(Noter que $a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n + 0.t^{n+1} + 0.t^{n+2} + \ldots + 0.t^m$ si $n < m$)

Déf: $\mathbb{P} = \{ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \text{ fonction polynomiale} \}$. Si $f = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n$ avec $a_n \neq 0$

$\Rightarrow \deg(f) = n$

$\mathbb{P}_n = \{ f \in \mathbb{P} : \deg(f) \leq n \}$

$\deg(0) = -\infty$

$0 = 0 + 0t + 0t^2 + \dots + 0t^n + \dots$

On voit que $\mathbb{P}_n \subseteq \mathbb{P} \subseteq \{ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \text{ fonction} \}$

Avec la somme et le produit par des scalaires de $\{ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \text{ fonctions} \}$, on voit que $\mathbb{P}_n$ et $\mathbb{P}$ sont des espaces vectoriels. (exo 1, série 3)

$\deg(f \cdot g) = \deg(f) + \deg(g)$

$\deg(f+g) \leq \max(\deg(f), \deg(g))$

Déf 4.19 Soit V un EV. Une partie $W \subseteq V$ est un sous espace vectoriel (SEV) si

(SEV.1) $0_V \in W$ (SEV.2') $v + \lambda w \in W$, $\forall v, w \in W, \lambda \in \mathbb{R}$

Exemple H $\mathbb{P} \subseteq \{ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \text{ fonction} \}$ est un SEV de $\{ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \text{ fonction} \}$.

Exemple 4.22 $\mathbb{P}_n$ est un SEV de $\mathbb{P}$.

Exercice Si $W \subseteq V$ est SEV d'un EV alors W avec la somme et le produit des scalaires de V restreints à des éléments de W est un EV (exercice 2, série 3)

Déf 4.14 Soit V un EV et $\mathcal{F} = \{ v_1, \dots, v_p \} \subseteq V$. Alors une combinaison linéaire

$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p \in V$ avec $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$

La famille $\mathcal{F}$ est liée si il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ dont au moins un est non nul tels que

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p = 0_V.$$

La famille $\mathcal{F}$ est libre si elle n'est pas liée.

Exemple 4.16 $\{1, t, t^2, \dots, t^p\} \subseteq \mathbb{P}$ est-elle libre ou liée ?

$$\lambda_0 \cdot 1 + \lambda_1 \cdot t + \dots + \lambda_p t^p = 0 = 0 + 0t + 0t^2 + \dots + 0t^p \xrightarrow{\boxed{\text{Fait}}} \lambda_0 = 0, \lambda_1 = 0, \dots, \lambda_p = 0 \checkmark$$

Déf 4.25 Soit $\mathcal{F} = \{v_1, \dots, v_p\} \subseteq V$, où V est EV. Alors

$$\mathrm{Vect}\, \mathcal{F} = \mathrm{Vect}\{v_1, \dots, v_p\} = \{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p : \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}\}$$

(partie engendrée par $\mathcal{F}$ ou sous-espace vectoriel engendré par $\mathcal{F}$.)

Propriété fondamentale (lemme 4) $\mathrm{Vect}\, \mathcal{F}$ est un SEV de V.

(Preuve) $0_V = 0 \cdot v_1 + \dots + 0 v_p \in \mathrm{Vect}\, \mathcal{F}$.

(car $0 \cdot u = 0_V$, $\forall u \in V$ ← Exercice 3, série 3)

$u = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p$ et $w = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_p v_p$

alors

$$u + \lambda w = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p + \lambda(\mu_1 v_1 + \dots + \mu_p v_p)$$

$$\overset{(EV.5)}{=} \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p + \lambda(\mu_1 v_1) + \dots + \lambda(\mu_p v_p)$$

$$\overset{(EV.7)}{=} \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p + (\lambda \mu_1) v_1 + \dots + (\lambda \mu_p) v_p$$

$$\overset{(EV.1)}{=} \lambda_1 v_1 + (\lambda \mu_1) v_1 + \dots + \lambda_p v_p + (\lambda \mu_p) v_p = (*)$$

$$(*) \overset{(EV.6)}{=} (\lambda_1 + \lambda \mu_1) v_1 + \dots + (\lambda_p + \lambda \mu_p) v_p \in \mathrm{Vect}\, \mathcal{F}.$$

$\square$